数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 62-69

$a \pmod p$ の剰余位数の分布について, II

大阪工業大学 工学部 知念 宏司 (Koji Chinen)
Department of Mathematics, Faculty of Engineering,
Osaka Institute of Technology.
明治学院大学 経済学部 村田 玲音 (Leo Murata)
Department of Mathematics, Faculty of Economics,
Meijigakuin University.

1 導入

まず, 本稿で考察する問題について説明する. 自然数 a $(a \neq 1)$ をとり, p は奇素数, $p \nmid a$ とする. また $D_a(p)$ を a の mod p での剰余位数, つまり $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^{\times}$ において a が生成する部分群 $\langle a \rangle$ の位数, そして $I_a(p) := |\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^{\times} : \langle a \rangle|$ (a の mod p での剰余指数) とする. このとき次の問題を考える:

問題 1.1 集合

$$Q_a(x;k,l) := \{p \leq x \ ; \ D_a(p) \equiv l \pmod k\} \quad (0 \leq l < k)$$

の自然密度, i.e. $\Delta_a(k,l) := \lim_{x\to\infty} \sharp Q_a(x;k,l)/\pi(x)$ を求めよ ($\pi(x)$: x 以下の素数の個数).

本稿はこの問題に対する最初の報告 [1] の続編であり, その後得られた新しい結果を報告することを目的としている. われわれがこのような問題を考えるに到った背景については, [1], [2], [3] などに述べてある. また, われわれとは別の観点からこの問題を考えた研究者がいたことは [1] の付記 (p.255) で触れたが, それに関して詳しいことは, [2, p.2] をご参照いただきたい.

さて, [1] において, われわれは $k=4$ の場合を考え, 次の結果を報告した:

定理 1.2 a は square free, $a > 2$ とする.
(i) $l = 0, 2$ のとき

$$\sharp Q_a(x;4,l) = \frac{1}{3}\mathrm{li}\, x + O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right) \quad (x \to \infty).$$

(ii) さらに $a \equiv 1 \pmod 4$ を仮定する. $l = 1, 3$ のとき, GRH (一般 Riemann 予想) の仮定のもとで,

$$\sharp Q_a(x;4,l) = \frac{1}{6}\mathrm{li}\, x + O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right) \qquad (x \to \infty).$$

その後, 現在までに得られた結果は 2 つで, それらは次のようにまとめられる:

(1) $k=4$ のとき, a に関する仮定を大幅に緩め, 密度を計算した. その結果, $l = 1, 3$ のときの密度は, 必ずしも 1/6 づつにはならないことが判明した. また, そのような場合に, 密度はある種の無限積を用いて表されることがわかった.

(2) $k=q^i$ (q: 奇素数, $i \geq 1$) の場合に, 自然密度 $\Delta_a(q^i,j)$ $(1 \leq j < q^i)$ の存在を証明, さらに, $q|j$ の場合について, $\Delta_a(q^i,j)$ の値を決定した.

ただし, 上記 (1), (2) いずれの場合も, GRH の仮定が必要である.

上記 (1) の結果については [2] ですでに報告してあるので, ここでは主に (2) について述べることにするが, (1) の結果は [1] の直接の拡張なので, §3 で結果のみ簡単に紹介する.

今回の主結果は次の通りである:

定 理 1.3 $a(\geq 2)$ は 完全 b 乗数ではないとし $(b \geq 2)$, q: 奇素数, $i \geq 1$ とする. このとき GRH の仮定のもとで, $1 \leq j < q^i$ に対して

$$Q_a(x;q^i,j) = \Delta_a(q^i,j)\mathrm{li}\,x + O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right) \quad (x \to \infty)$$

なる実数 $\Delta_a(q^i,j)$ が存在し, $q|j$ ならば,

$$\Delta_a(q^i,j) = \frac{1}{q^{i-2}(q^2-1)} \tag{1.1}$$

が成立する.

注 意. 式 (1.1) は $j=0$ のときも全く同じ形で成立し, そのときは unconditional である ($cf.$ 命題 2.6).

このあと, §2 では定理 1.3 の証明の概略を述べる. §3 では $\Delta_a(4,l)$ に関する結果を述べ, 最後の §4 では, 関連する数値実験の結果を紹介する.

最後に, 記号を少し整理しておく. 整数 k に対し, ζ_k は 1 の原始 k 乗根, $\varphi(k)$ と $\mu(k)$ はそれぞれ Euler の関数と Möbius の関数を表す. また素数 q のべき q^e に対し, $q^e \| k$ は $q^e|k$ かつ $q^{e+1} \nmid k$ を表すものとする.

2 定理 1.3 の証明

まず, 自然密度 $\Delta_a(q^i,j)$ の存在を証明しよう. 以後, $j=hq^e$ $(q \nmid h,\ 0 \leq e \leq i-1)$ とする.

一般に, 剰余位数 D_a はきわめて扱いづらい量であるが, 関係式 $D_a(p)I_a(p)=p-1$ を用いて, これを I_a の式で書き換えることができる. I_a の方が, 代数体における p の分解の様子で必要な条件を記述でき, いくぶん扱いやすい:

補 題 2.1

$$Q_a(x;q^i,j) = \bigcup_{f \geq e} \bigcup_{\substack{1 \leq r < q^i \\ (q,r)=1}} \left\{ p \leq x;\ \begin{array}{l} p \equiv 1 + rq^f \pmod{q^{f+i}}, \\ I_a(p) \equiv \{(r\overline{h}) \bmod q^{i-e}\} \cdot q^{f-e} \pmod{q^{f+i-2e}} \end{array} \right\},$$

ただし, $h\overline{h} \equiv 1 \pmod{q^{i-e}}$, また, 右辺の集合はすべて disjoint である.

証明は一種の sieve method によるが, 全く初等的である. $I_a(p)$ の条件を等号で書くと, 次の式が得られる:

$$\sharp Q_a(x; q^i, j)$$
$$= \sum_{\substack{1\le r<q^i \\ (q,r)=1}} \sum_{f\ge e} \sum_{l\ge 0} \sharp \left\{ p \le x;\ \begin{array}{l} p \equiv 1 + rq^f \pmod{q^{f+i}}, \\ I_a(p) = \{(r\bar{h}) \bmod q^{i-e} + l \cdot q^{i-e}\} \cdot q^{f-e} \end{array} \right\}. \tag{2.1}$$

この式の右辺に現れる素数集合は, $\{p \le x;\ I_a(p) = m,\ p \equiv s \pmod t\}$ $(m, s, t$: 整数) の形である. $\{p \le x;\ I_a(p) = m\}$ の密度はすでに Murata [5] で求められている. もう 1 つの条件 $p \equiv s \pmod t$ は, Chebotarev の定理 (*cf*. Lagarias-Odlyzko [4]) により扱うことができ, 結局, 次の定理を得る (この部分の議論の詳細は, [1, §4] とほぼ同じである):

定 理 2.2 (密度存在) $a \ge 2$, a は完全 b 乗数でないとする $(b \ge 2)$ と, GRH の仮定のもとで,

$$\sharp Q_a(x; q^i, j) = \Delta_a(q^i, j)\,\mathrm{li}\, x + O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right),$$

$$\Delta_a(q^i, j) = \sum_{\substack{1\le r<q^i \\ (q,r)=1}} \sum_{f\ge e} \sum_{l\ge 0} \frac{k_0}{\varphi(k_0)} \sum_{d|k_0} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) c_r(k, n, d)}{[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbf{Q}]}, \tag{2.2}$$

ただし,

$$k = \{(\bar{h}r) \bmod q^{i-e} + l \cdot q^{i-e}\} q^{f-e},$$

この k に対して,

$$k_0 = \prod_{\substack{p:\text{prime} \\ p|k}} p \qquad (k\ \text{の core}),$$

$$G_{k,n,d} = \mathbf{Q}(a^{1/kn}, \zeta_{kd}, \zeta_n), \quad \tilde{G}_{k,n,d} = G_{k,n,d}(\zeta_{q^{f+2}}).$$

また $c_r(k, n, d)$ については, まず $\sigma_r \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+2}})/\mathbf{Q})$ を $\sigma_r : \zeta_{q^{f+2}} \mapsto \zeta_{q^{f+2}}^{1+rq^f}$ で定まるものとし, $\sigma_r^*|_{\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+2}})} = \sigma_r$ を満たす $\sigma_r^* \in \mathrm{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d})$ を考える. そして

$$c_r(k, n, d) = \begin{cases} 1, & \sigma_r^*\ \text{が存在するとき}, \\ 0, & \sigma_r^*\ \text{が存在しないとき} \end{cases}$$

により定義する.

注 意. (1) 密度の存在を示すには, 級数 (2.2) が 1 つの実数値として定まることを言わねばならない. 級数 (2.2) の絶対収束を示すことは困難と思われるため, 次のような考え方でこれを示す: まず (2.2) 式の $k_0/\varphi(k_0)$ 以下は, (2.1) 式右辺の素数集合の密度であるから 0 以上, (2.1) 式右辺の素数集合は互いに disjoint なので, これらの密度をすべて足し合わせた (2.2) の値は, 素数全体の密度 (すなわち 1) を超えることはない. したがって (2.2) は, (n に関する和を l に関する和よりも前に持っていくことさえしなければ) 上に有界な

正項級数となり, 値が定まることが言える. ついでながら, n に関する和の絶対収束を示すことは可能である.

(2) 写像 σ_r^* は, 存在すればただ 1 つであることが証明できる.

この定理により, 自然密度 $\Delta_a(q^i, j)$ の存在がわかった. しかし, (2.2) 式には, $[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbf{Q}]$ と $c_r(k,n,d)$ という, 明示されていない項が残っている. このうち $[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbf{Q}]$ については,

補 題 2.3

$$[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbf{Q}] = \begin{cases} kn \cdot \varphi(\langle kd, n, q^{f+i} \rangle), \text{または} \\ \dfrac{1}{2} kn \cdot \varphi(\langle kd, n, q^{f+i} \rangle), \end{cases}$$

ただし, $\langle a, b, c \rangle$ は, a, b, c の最小公倍数. 第 2 の場合が起こるのは, kn が偶数, かつ次の①, ②, ③ いずれかが成り立つ場合に限る:

$$\begin{array}{lll} ① & \cdots & a_1 \equiv 1 \pmod 4,\ a_1 | \langle kd, n, q^{f+i} \rangle, \\ ② & \cdots & a_1 \equiv 2 \pmod 4,\ 4a_1 | \langle kd, n, q^{f+i} \rangle, \\ ③ & \cdots & a_1 \equiv 3 \pmod 4,\ 4a_1 | \langle kd, n, q^{f+i} \rangle. \end{array}$$

係数 $c_r(k,n,d)$ の決定には少々長い計算が必要である. ここでは方針のみを述べる. まず Galois 理論からの, 次の補題を準備する:

補 題 2.4 K: 体, L, M: K の有限次拡大とし, L/M は Galois 拡大であるとする. このとき

(I) ML/M は Galois 拡大で,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(ML/M) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/K) \\ \Psi & & \Psi \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_L \end{array}$$

は単射準同型, したがって $\mathrm{Gal}(ML/M)$ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群と考えられる.

(II) 次の 3 つは同値:

(i) $\mathrm{Gal}(ML/M) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$,

(ii) $[ML : M] = [L : K]$,

(iii) $K = M \cap L$.

これを $M = G_{k,n,d}$, $L = \mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})$ に対して適用すると, $ML = \tilde{G}_{k,n,d}$ となる. そして共通部分 $K = G_{k,n,d} \cap \mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})$ を求め, σ_r が K 上恒等写像であるかどうかを調べる. もし $\sigma_r|_K = \mathrm{id}.$ ならば, $\sigma_r \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})/K)$ であり, 補題 2.4 より $\tau|_{\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})} = \sigma_r$ なる $\tau \in \mathrm{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d})$ が存在する. これが σ_r^* であり, $c_r(k,n,d) = 1$ が言える. また, $\sigma_r|_K \neq \mathrm{id}.$ ならば, $\sigma_r \notin \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})/K)$ であるが, $\mathrm{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})/K)$ であることは同じなので, $\tau|_{\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+i}})} = \sigma_r$ なる $\tau \in \mathrm{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d})$ は存在せず, $c_r(k,n,d) = 0$ となる.

以上を基本的な考え方として $c_r(k,n,d)$ をすべて求めることができる. 詳細は紙数の都合により割愛するが, 次の結果が得られる:

定 理 2.5 $e \geq 1$ ならば, すべての r, k, n, d に対して, $c_r(k,n,d) = 1$.

この結果から, $e \geq 1$ の場合, $\Delta_a(q^i, hq^e)$ はすべての h に対して, 級数として等しいことが証明される. すなわち, $q|j$, $j \neq 0$ であるような $\Delta_a(q^i, j)$ はすべて等しい. さらに, 次を利用する:

命 題 2.6 $a \in \mathrm{N}$, $a \geq 2$ とし, a は完全 b 乗数 $(b \geq 2)$ ではないとする. q: 奇素数, $i \geq 1$ のとき,

$$\Delta_a(q^i, 0) = \frac{1}{q^{i-2}(q^2-1)}.$$

証 明. [1, §3] と同様 (この結果は unconditional であることに注意).

このことと, $i \geq 1$, $m \geq i+1$ に対して成り立つ等式

$$\Delta_a(q^i, 0) - \Delta_a(q^{i+1}, 0) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq q^m - 1 \\ q^i \| j}} \Delta_a(q^m, j)$$

によって, 主結果である定理 1.3 が得られる.

3 $\Delta_a(4, l)$ の場合

ここでは, $\Delta_a(4,l)$ に関して, [1] 以後に得られた結果について簡単に紹介する. 特に $l = 1, 3$ の場合が重要である. [1] においては, a に強い条件が課せられていたが, 今回それを大幅に緩めることができた:

定 理 3.1 $a \in \mathrm{N}$, $a \geq 2$ とし, a は完全 b 乗数 $(b \geq 2)$ ではないとする. $a = a_1 a_2^2$ (a_1: square free) とおく. すると GRH のもとで,

$$\sharp Q_a(x; 4, l) = \Delta_a(4, l) \operatorname{li} x + O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right) \quad (x \to \infty)$$

が成立し, 自然密度 $\Delta_a(4,l)$ $(l = 1, 3)$ は次の式で与えられる:

(I) $a_1 \equiv 1, 3 \pmod 4$ ならば

$$\Delta_a(4,1) = \Delta_a(4,3) = \frac{1}{6}.$$

(II) $a_1 \equiv 2 \pmod 4$ のとき, まず定数 C を次のように定義する:

$$C := \prod_{\substack{p \equiv 3 \pmod 4 \\ p:\text{prime}}} \left(1 - \frac{2p}{(p^2+1)(p-1)}\right) \quad (\approx 0.64365).$$

(i) $a_1 = 2$ のとき,

$$\Delta_a(4,1) = \frac{7}{48} - \frac{C}{8}, \quad \Delta_a(4,3) = \frac{7}{48} + \frac{C}{8}.$$

(ii) $a_1 > 2$ のとき, $a_1 = 2a_1'$ (a_1': odd) とおくと, a_1' の少なくとも 1 つの素因数 p が $p \equiv 1 \pmod 4$ を満たすなら

$$\Delta_a(4,1) = \Delta_a(4,3) = \frac{1}{6},$$

a_1' のすべての素因数 p が $p \equiv 3 \pmod 4$ を満たすなら

$$\begin{aligned} \Delta_a(4,1) &= \frac{1}{6} \pm \frac{C}{8} \prod_{p|a_1'} \frac{-2p}{p^3 - p^2 - p - 1}, \\ \Delta_a(4,3) &= \frac{1}{6} \mp \frac{C}{8} \prod_{p|a_1'} \frac{-2p}{p^3 - p^2 - p - 1}, \end{aligned}$$

ただし $\Delta_a(4,1)$ における複号は, $a_1' \equiv 3 \pmod 4$ のとき $+$, $a_1' \equiv 1 \pmod 4$ のとき $-$, $\Delta_a(4,3)$ における複号はこれと同順とする.

この定理により, つねに $\Delta_a(4,1) \leq \Delta_a(4,3)$ が成立することになる. なお, $\Delta_a(4,0)$, $\Delta_a(4,2)$ は unconditional に求めることができ, 証明もいくぶん易しい. その場合の密度は,

$$\begin{aligned} a_1 = 2 &\implies \Delta_a(4,0) = \frac{5}{12},\ \Delta_a(4,2) = \frac{7}{24}, \\ a_1 \neq 2 &\implies \Delta_a(4,0) = \Delta_a(4,2) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

この結果について詳しいことは [2], [6] にまとめてある.

4 数値実験

自然数 a ($a \neq 1$), および $k, l \in \mathbf{Z}$, $0 \leq l < k$ をとる. 以下は $Q_a(x;k,l)$ の密度, すなわち $\sharp Q_a(x;k,l)/\pi(x)$ の表である. x としては 10^3 から $2 \cdot 10^7$ まで取った. また $a = 2, 3, 5, 15$ を選び, $k = 9, 27, 25$ の場合を計算した. つまり k は主結果で扱った奇素数べき q^i の場合のみとした ($\Delta_a(4,l)$ に関する数値実験結果は [2] で紹介してあるので, そちらをご参照いただきたい). また, $k = 27, 25$ の場合は, スペースの都合上, $q|l$ であるような l のみ掲載した.

● $k = 9$ の場合

$a = 2$

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.137725	0.137725	0.095808	0.113772	0.119760	0.095808	0.119760	0.107784	0.071856
10^4	0.122150	0.124593	0.095277	0.131107	0.110749	0.093648	0.123779	0.112378	0.086319
10^5	0.125430	0.113752	0.094047	0.125013	0.118027	0.091857	0.125951	0.114899	0.091023
10^6	0.124922	0.113979	0.093863	0.123610	0.113992	0.093239	0.126655	0.116183	0.093558
10^7	0.125081	0.114715	0.092988	0.124953	0.115223	0.093530	0.125222	0.114990	0.093297
$2 \cdot 10^7$	0.125010	0.114659	0.093316	0.125025	0.115149	0.093419	0.125092	0.115040	0.093288

$a = 3$

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.120482	0.102410	0.084337	0.144578	0.114458	0.102410	0.102410	0.132530	0.096386
10^4	0.126324	0.103504	0.098615	0.126324	0.105949	0.102689	0.129584	0.108394	0.098615
10^5	0.125652	0.103024	0.106257	0.123358	0.104275	0.102294	0.126694	0.106674	0.101773
10^6	0.124669	0.103012	0.104044	0.124045	0.104158	0.104451	0.126554	0.103954	0.105114
10^7	0.125189	0.104287	0.103935	0.124887	0.104182	0.104370	0.124696	0.103869	0.104584
$2 \cdot 10^7$	0.125079	0.104208	0.104186	0.124851	0.104158	0.104046	0.125046	0.104146	0.104280

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.126506	0.126506	0.072289	0.132530	0.120482	0.072289	0.120482	0.132530	0.096386
10^4	0.120619	0.119804	0.077425	0.122249	0.127954	0.083130	0.134474	0.120619	0.093725
10^5	0.125339	0.122106	0.082065	0.124400	0.130344	0.082586	0.124713	0.123462	0.084984
10^6	0.125025	0.124796	0.083125	0.125535	0.126070	0.083265	0.124274	0.124656	0.083253
10^7	0.125197	0.124708	0.083665	0.125235	0.124806	0.083516	0.124700	0.124910	0.083263
$2\cdot10^7$	0.125040	0.124797	0.083609	0.125136	0.124946	0.083434	0.124762	0.124856	0.083419

$a=15$

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.145455	0.133333	0.109091	0.109091	0.103030	0.060606	0.115152	0.121212	0.103030
10^4	0.127243	0.128874	0.101958	0.127243	0.114192	0.087276	0.114192	0.119086	0.079935
10^5	0.126916	0.123371	0.092502	0.124831	0.119825	0.085098	0.120555	0.117635	0.089269
10^6	0.125588	0.120670	0.088031	0.124097	0.119715	0.088018	0.124709	0.120925	0.088248
10^7	0.125257	0.120304	0.087997	0.124973	0.119834	0.088407	0.124573	0.120429	0.088226
$2\cdot10^7$	0.125089	0.120244	0.088057	0.124771	0.120183	0.088271	0.124937	0.120295	0.088153

● $k=27$ の場合

$a=2$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.041916	0.029940	0.041916	0.041916	0.029940	0.041916	0.053892	0.053892	0.035928
10^4	0.046417	0.033388	0.043160	0.039088	0.046417	0.041531	0.036645	0.051303	0.039088
10^5	0.041914	0.041602	0.040455	0.042019	0.041289	0.044312	0.041497	0.042123	0.041184
10^6	0.041492	0.041632	0.042142	0.042269	0.041390	0.042027	0.041161	0.040588	0.042486
10^7	0.041571	0.041804	0.041941	0.041753	0.041602	0.041586	0.041757	0.041547	0.041696
$2\cdot10^7$	0.041662	0.041771	0.041798	0.041764	0.041555	0.041693	0.041585	0.041699	0.041601

$a=3$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.042169	0.042169	0.042169	0.036145	0.048193	0.036145	0.042169	0.054217	0.024096
10^4	0.040750	0.040750	0.049715	0.039120	0.042380	0.038305	0.046455	0.043195	0.041565
10^5	0.042857	0.039833	0.041606	0.039833	0.041606	0.042753	0.042961	0.041919	0.042336
10^6	0.041416	0.042359	0.042333	0.041467	0.041136	0.042754	0.041786	0.040550	0.041467
10^7	0.041661	0.041506	0.041514	0.041867	0.041646	0.041515	0.041661	0.041735	0.041667
$2\cdot10^7$	0.041623	0.041690	0.041581	0.041777	0.041652	0.041727	0.041679	0.041509	0.041738

$a=5$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.054217	0.048193	0.048193	0.042169	0.042169	0.048193	0.030120	0.042169	0.024096
10^4	0.044825	0.044825	0.052160	0.037490	0.039935	0.043195	0.038305	0.037490	0.039120
10^5	0.042544	0.041502	0.041293	0.040772	0.040042	0.041084	0.042023	0.042857	0.042336
10^6	0.041811	0.041212	0.041480	0.041467	0.041926	0.041391	0.041747	0.042397	0.041403
10^7	0.041628	0.041780	0.041717	0.041714	0.041565	0.041595	0.041855	0.041890	0.041389
$2\cdot10^7$	0.041655	0.041764	0.041605	0.041665	0.041598	0.041724	0.041719	0.041774	0.041432

$a=15$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.048485	0.048485	0.036364	0.048485	0.030303	0.054545	0.048485	0.030303	0.024242
10^4	0.045677	0.045677	0.036705	0.045677	0.044046	0.040783	0.035889	0.037520	0.036705
10^5	0.043070	0.041506	0.039629	0.041506	0.042549	0.042027	0.042340	0.040776	0.038899
10^6	0.041251	0.041327	0.040869	0.042130	0.041710	0.041824	0.042207	0.041060	0.042015
10^7	0.041724	0.041470	0.041407	0.041783	0.041712	0.041493	0.041750	0.041791	0.041673
$2\cdot10^7$	0.041746	0.041574	0.041712	0.041706	0.041561	0.041548	0.041637	0.041635	0.041678

● $k=25$ の場合

$a=2$

x	$l=0$	$l=5$	$l=10$	$l=15$	$l=20$
10^3	0.036145	0.048193	0.048193	0.024096	0.048193
10^4	0.048900	0.039935	0.037490	0.035860	0.043195
10^5	0.043066	0.041084	0.042544	0.040563	0.042544
10^6	0.041518	0.042142	0.042792	0.040741	0.041391
10^7	0.041487	0.041691	0.041714	0.041476	0.041854
$2\cdot10^7$	0.041620	0.041634	0.041719	0.041678	0.041708

x	$l=0$	$l=5$	$l=10$	$l=15$	$l=20$
10^3	0.042169	0.066265	0.042169	0.024096	0.036145
10^4	0.039120	0.050530	0.044010	0.034230	0.043195
10^5	0.041814	0.044526	0.041919	0.038686	0.041293
10^6	0.041786	0.041505	0.041391	0.042142	0.041301
10^7	0.041482	0.041778	0.041465	0.041849	0.041765
$2 \cdot 10^7$	0.041660	0.041911	0.041575	0.041668	0.041634

$\underline{a=5}$

x	$l=0$	$l=5$	$l=10$	$l=15$	$l=20$
10^3	0.036145	0.042169	0.054217	0.054217	0.018072
10^4	0.043195	0.040750	0.042380	0.049715	0.035045
10^5	0.041814	0.039103	0.042440	0.043170	0.042023
10^6	0.041977	0.041747	0.041964	0.041556	0.041442
10^7	0.041581	0.041855	0.041775	0.041482	0.041581
$2 \cdot 10^7$	0.041668	0.041809	0.041665	0.041548	0.041542

$\underline{a=15}$

x	$l=0$	$l=5$	$l=10$	$l=15$	$l=20$
10^3	0.042424	0.024242	0.036364	0.054545	0.036364
10^4	0.039967	0.042414	0.038336	0.047308	0.034258
10^5	0.042027	0.041610	0.041610	0.041193	0.040150
10^6	0.041710	0.041264	0.042194	0.041315	0.041646
10^7	0.041709	0.041545	0.041863	0.041809	0.041747
$2 \cdot 10^7$	0.041712	0.041683	0.041826	0.041775	0.041515

参考文献

[1] 知念 宏司, 村田 玲音: a (mod p) の剰余位数の分布について, 数理解析研究所講究録 1219『解析数論の展望と諸問題』(2001 年 7 月), 245-255.

[2] ________: a (mod p) の剰余位数の分布について,「第 4 回 代数学と計算」研究集会 (東京都立大学) 報告集, ftp://tnt.math.metro-u.ac.jp/pub/ac/2001 で公開中.

[3] Chinen, K. and Murata, L. : On a distribution property of the residual order of a (mod p), preprint.

[4] Lagarias, J. C. and Odlyzko, A. M. : Effective versions of the Chebotarev density theorem, in *Algebraic Number Fields (Durham, 1975)*, 409-464, Academic Press, London, 1977.

[5] Murata, L. : A problem analogous to Artin's conjecture for primitive roots and its applications, Arch. Math. **57** (1991), 555-565.

[6] Murata, L. and Chinen, K.: On a distribution property of the residual order of a (mod p) — II, preprint.